Понятие предела последовательности.

В курсе математического анализа понятие предела является одним из основных. С помощью предела вводятся производная и определенный интеграл. Предварительно ознакомимся с понятием числовой последовательности.

Пусть каждому натуральному числу **n** поставлено в соответствие число $a_n = f(n)$, т.е. пусть задана функция натурального аргумента. Тогда говорят, что задана ***числовая последовательность*** $\{a_n\}$. Обычно числовую последовательность задают формулой

$$a_n = f\ (n).$$

Так, например:

1) формула $a_n = 2n – 1$ числам натурального ряда

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

ставит в соответствие последовательность нечетных чисел

$$1, 3, 5, 7, 9, \ldots.$$

2) формула $a_n = 1 - 2n$ задает числовую последовательность

$$-1, -3, -5, -7, \ldots,$$

которая является бесконечно убывающей арифметической прогрессией;

3) формула $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$ задает возрастающую последовательность правильных дробей

$$\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{4}{9},\frac{5}{11},\ldots;$$

4) формула $a_n = \dfrac{4n-1}{3n-1}$ задает убывающую последовательность неправильных дробей

$$\frac{3}{2},\frac{7}{5},\frac{11}{8},\frac{15}{11},\frac{19}{14},\ldots$$

Во всех приведенных примерах заданные последовательности являются бесконечными: для каждой из них не существует последнего члена.

Определение. Число ***a*** называется пределом последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$, если для всякого сколь угодно малого положительного числа ε (эпсилон) найдется такое положительное число N, что абсолютная величина разности $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$. Это кратко записывается так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

Предел функции.

Пусть дана функция: $y = f(x)$.

Определение. Число $\boldsymbol{A}$ называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x) - \boldsymbol{A}| < \varepsilon$ при $0 < |x - \boldsymbol{a}| < \delta$.

Это записывают так:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

Теоремы о пределах
(правила предельного перехода)

1. Предел суммы или разности равен сумме или разности пределов.

$$\lim(x \pm y) = \lim x \pm \lim y$$

2. Предел произведения равен произведению пределов.

$$\lim(x \cdot y) = \lim x \cdot \lim y$$

3. Предел отношения равен отношению пределов.

$$\lim(x / y) = \lim x / \lim y, \ \lim y \neq 0.$$

Свойства пределов.

1. Предел постоянной равен этой постоянной.

$$\lim A = A, \text{ если } A = \text{const}.$$

2. Постоянную можно вынести за знак предела.

$$\lim(c \cdot y) = c \cdot \lim y, \text{ если } c = \text{const}.$$

3. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, то

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

4. Если существует $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ и $f(x)$ – элементарная функция, то

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

Например:

$$\lim_{x\to a} \sqrt{g(x)} = \sqrt{\lim_{x\to a} g(x)},$$

$$\lim_{x\to a} \log_c g(x) = \log_c \lim_{x\to a} g(x).$$

Понятие бесконечно малой и бесконечно большой величины.

Если предел функции равен нулю ($\ell im y = 0$), то она называется бесконечно малой величиной.

Если предел функции равен бесконечности ($\ell im y = \infty$), т.е. величине, обратной к бесконечно малой величине, то она называется бесконечно большой величиной.

Следовательно, выполняются равенства

$$\ell im \frac{1}{0} = \infty, \quad \ell im \frac{1}{\infty} = 0.$$

Найти следующие пределы:

1. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{5x+2}{2x+3}$.

Δ Так как x → 4, то числитель дроби стремится к числу

5 · 4 + 2 = 22 , а знаменатель – к числу 2 · 4 + 3 = 11. Следовательно,

$$\lim_{x \to 4} \frac{5x+2}{2x+3} = \frac{22}{11} = 2.$$

2. $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1} = \dfrac{3-3}{9+3+1} = \dfrac{0}{13} = 0$

3. $\lim\limits_{x \to -1} (x^3 - x^2 + 1) = -1 - 1 + 1 = -1$

4. $\lim\limits_{x \to 0} (3x^3 + x^2 - 8x + 10) = 0 + 0 - 0 + 10 = 10$

Но при простой подстановке может получиться неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$. Эти случаи рассмотрим далее.

<u>Задания для самостоятельной работы.</u>

Найти пределы функций:

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+2x+2}{x^2-1}$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2+x}{4x^3+x+10}$

3. $\lim\limits_{x\to 0,1} \dfrac{5x+4}{1-x}$

4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-4x+5}{x^2+6}$

5. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+3)(x-2)}{x+2}$

6. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3}{2x-6}$

7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-5x-3}{4x^2-13x+3}$

8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x^2-5x-1}{2x^2-x-1}$

Раскрытие неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$.

Для раскрытия неопределенности такого вида необходимо предварительно сократить дробь (разложив на множители), а затем найти предел.

Например:

1. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$.

Δ Здесь числитель и знаменатель дроби при x → 3 стремятся к нулю(неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$). Имеем

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x} = \frac{3+3}{3} = 2 .$$

2. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20} = \lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)(x-2)}{(x-5)(x-4)} = \lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-2}{x-4} = \dfrac{3}{1} = 3$,

где необходимо было решить квадратные уравнения для разложения квадратного трехчлена на множители в числителе и в знаменателе дроби по формуле $\boldsymbol{ax^2+bx+c = (x-x_1)(x-x_2)}$.

3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+3x}+1)}{(\sqrt{1+3x}-1)(\sqrt{1+3x}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+3x}+1)}{1+3x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+3x}+1)}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}+1}{3} = \frac{2}{3},$$

здесь, для того чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе, и числитель и знаменатель были умножены на выражение, сопряженное знаменателю, а затем знаменатель был свернут по формуле разности квадратов.

<u>Задания для самостоятельной работы.</u>

Найти пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^3+x}{x}$

2. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

4. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x+2}$

5. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3-x}{x^3-27}$

6. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$

7. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-5}{2-\sqrt{x-1}}$

8. $\lim\limits_{x\to \sqrt{5}} \dfrac{x^4-25}{x^2-5}$

9. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-9}$

10. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-8x+15}{x^2-25}$

11. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$

12. $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}$

14. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4x^2-7x-2}{5x^2-9x-2}$

15. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x^2-49}$

16. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^3-2x^2+x-2}$

Раскрытие неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Для раскрытия неопределенности такого вида необходимо числитель и знаменатель разделить на ***x*** с наибольшим показателем степени.

Например:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4 - x^2 + 2}{x^3 - x + 1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^4}}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^4}} = \dfrac{1}{0} = \infty$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + x^4}{x^5 + x^6} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{x^3}{x^6} + \dfrac{x^4}{x^6}}{\dfrac{x^5}{x^6} + \dfrac{x^6}{x^6}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x} + 1} = \dfrac{0}{1} = 0$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10x^2 - x - 6}{3x - x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{6}{x^2}}{\dfrac{3}{x} - 1} = \dfrac{10}{-1} = -10$

<u>Задания для самостоятельной работы.</u>

Найти пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - 2x + 6}{3x^3 + x^2 - 26}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x + 5}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x^3 + 3x + 7}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3 - 4x + 8}{5x^3 + 27x^2 + x}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10x^4 - 8x^2 + 3}{5x^4 + 3x^3 + 5}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3 + 4x^2 - 1}{8x^2 - 6x + 3}$

Иногда при подстановке в функцию предельного значения аргумента получаются выражения, не имеющие конкретного смысла:

$$\infty - \infty,\quad 1^{\infty},\quad 0 \cdot \infty,\quad 0^0,$$

их называют «неопределенностями». В этих случаях для нахождения пределов необходимо предварительно выполнить некоторые преобразования данного выражения.

Рассмотрим некоторые приемы, которыми пользуются при таких преобразованиях.

Например: Имеется неопределенность вида $[\,\infty - \infty\,]$:

1.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+6x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+6x}-x)\left(\sqrt{x^2+6x}+x\right)}{(\sqrt{x^2+6x}+x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+6x-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{6}{x}\right)}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{x\sqrt{1+\frac{6}{x}}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{x\left(\sqrt{1+\frac{6}{x}}+1\right)}=\frac{6}{1+1}=3$$

2.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)(x+1)}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1\cdot(x+1)-2}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

Замечательные пределы.

Первый замечательный предел.

Предел отношения ***sin*** бесконечно малой величины к самой этой величины к самой этой величине равен 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$$

Например:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{3x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{3}\cdot 1=\dfrac{1}{3}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}=5\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos 3x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 3x}{3x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{cos3x}=$

$= 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}}=\dfrac{3}{5}$

Свойства:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{bx} = \dfrac{a}{b}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tgax}{bx} = \dfrac{a}{b}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx} = \dfrac{a}{b}$

Второй замечательный предел.

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

Например:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x} = \left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^{3} = e^{3}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{5x}\right)^{x} = \left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{5x}\right)^{5x}\right)^{\frac{1}{5}} = e^{\frac{1}{5}}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} (1+4x)^{\frac{3}{5x}} = \left(\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{4x}}\right)^{\frac{3\cdot 4}{5}} = e^{\frac{12}{5}}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$

<u>Задания для самостоятельной работы.</u>

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{3x}$ 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{3x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sin 7x}$ 4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 6x}{tg 3x}$

5. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{5}{3x}\right)^{2x}$ 6. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{2}{3x}\right)^{x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{5}{x}}$ 8. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{5x}$

Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей.

Пусть в некоторой окрестности точки x_0 функции f (x) и φ (x) дифференцируемы и φ′ (x) ≠ 0. Если $\lim\limits_{x\to x_0}$ f (x) = $\lim\limits_{x\to x_0}$ φ (x) = 0 или $\lim\limits_{x\to x_0}$ f (x) = $\lim\limits_{x\to x_0}$ φ (x) = ∞, т.е. частное f (x) ⁄ φ (x) в точке x = x_0 представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то

$\lim\limits_{x\to x_0}$ f (x)⁄φ (x) = $\lim\limits_{x\to x_0}$ f ′(x)⁄φ′ (x), если предел в правой части этого равенства существует.

Если частное f ′(x)⁄φ′ (x) в точке x = x_0 также есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ и производные f ′(x) и φ′ (x) удовлетворяют соответствующим условиям, то следует перейти к отношению вторых производных и.т.д.

В случае неопределенности вида 0·∞ или ∞ - ∞ следует алгебраически преобразовать данную функцию так, чтобы привести её к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ и далее воспользоваться правилом Лопиталя.

В случае неопределенности вида 0^0 или ∞^0 или 1^∞ следует прологарифмировать данную функцию и найти предел ее логарифма.

Например.

1. Найти предел: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$

Числитель и знаменатель стремится к нулю при x → 1, а потому имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Воспользуемся правилом Лопиталя, т.е. рассмотрим предел отношения производных заданных функций:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e} = \lim_{x\to 1} \frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x} = \frac{3}{e}$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$

В данном случае имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Находим

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}\left(1+\frac{x}{2}\right)}{1+e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left(2+\frac{x}{2}\right)}{e^x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}} = 0$$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \left(x^2\ln x\right)$

Здесь мы имеем неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Представим произведение функций в виде частного, а затем, получив неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} \left(x^2\ln x\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$

Это неопределенность вида ∞ - ∞. Для того чтобы найти предел функции, приведем дроби к общему знаменателю, а затем, получив неопределенность вида $\frac{0}{0}$, применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\left(e^x-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x\left(2+x\right)}=\frac{1}{2}$$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x\right)^x$

Это – неопределенность вида 0^0. Обозначим данную функцию через ***y***, т.е. $y = (\sin x)^x$, и прологарифмируем её:

$$\ln y = x\ln\sin x=\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{x}}.$$

Вычислим предел логарифма данной функции, применяя правило Лопиталя (здесь имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$) :

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{\sin x}=-\lim_{x\to 0}\left(x\cos x\frac{x}{\sin x}\right)$$

$= 0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}y=e^0=1$.

6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx\right)^{2\cos x}$

Это – неопределенность вида ∞^0. Положим $(\operatorname{tg} x)^{2\cos x} = y$ и прологарифмируем: $\ln y = 2\cos x\cdot\ln \operatorname{tg} x=\frac{2\ln tgx}{\frac{1}{\cos x}}$.

Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ell ny = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ell ntgx}{\sec x} = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sec^2 x}{tgx}}{\sec xtgx} = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec x}{tg^2 x} = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec xtgx}{2tgx\sec^2 x} =$$

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x = 0$, т. е. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y = e^0 = 1$.

7. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\ell nx}$.

Это – неопределенность вида 1^{∞}. Логарифмируя и применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0} \ell ny = \lim_{x\to 0}(\ell nx\ell n(1+x)) = \lim_{x\to 0} \frac{\ell n(1+x)}{\frac{1}{\ell nx}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{-\frac{1}{x\ell n^2 x}} = -\lim_{x\to 0} \frac{x\ell n^2 x}{x+1}$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{\ell n^2 x}{1+\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2\ell nx}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 2\lim_{x\to 0} \frac{\ell nx}{\frac{1}{x}} = 2\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = 0.$$

Таким образом, $\lim_{x\to 0} y = e^0 = 1$.